



# 論文



## 非定常空気をを用いた空力アドミッタンスの推定法

### Prediction Method of Aerodynamic Admittance Functions using Flutter Derivatives

田中 洋\*<sup>1</sup> 畑中章秀\*

Hiroshi TANAKA, Akihide HATANAKA

#### SUMMARY

This paper describes the comparison between analysis and measurement of aerodynamic admittance functions for lift and moment. Sears' function which is a theoretical expression for the aerodynamic admittance for a thin airfoil is conventionally applied to the gust response analysis of long span bridges. Comparing to the experimental results of the aerodynamic admittance function for deck sections, the measured aerodynamic admittance functions are different from Sears' function and some experimental formulas have been suggested. However, these formulas are not sufficient to apply to various sections. Then we propose new prediction method of aerodynamic admittance functions for lift and moment utilizing flutter derivatives and these functions obtained by our method have been compared with the measured ones and verified to be accurate.

#### 1. はじめに

橋梁の耐風設計において自然風の乱れに起因したガスト応答解析は重要な検討課題の一つである。ガスト応答解析では、多くの入力パラメータ（構造諸元、静的空気力、空力減衰、空力アドミッタンス、空間相関など）を必要とし、その一つ一つの精度が解析精度を左右する<sup>1)~5)</sup>。

本研究では、ガスト応答解析の入力パラメータの一つである空力アドミッタンスを取り扱う。揚力に関する空力アドミッタンスとしては薄翼の理論関数である *Sears* 関数<sup>6)</sup>があり、明石海峡大橋をはじめ多くの長大橋のガスト応答解析に適用されている<sup>7)</sup>。

一方、トラス補剛桁や充腹箱桁といった橋梁断面の空力アドミッタンスの実測例<sup>8)~10)</sup>をみると、断面形状によっては *Sears* 関数とかなり異なることが報告されている。また、充腹箱桁や種々の辺長比を

有する矩形断面に関する空力アドミッタンスの計測値から実験式も提案されている<sup>11),12)</sup>。しかし、これらの実験式は、対象とする断面形状が変われば適用できなくなることが予想される。従って、現状では、対象とする断面に応じて空力アドミッタンスを計測する必要がある。

空力アドミッタンスを計測する場合、大別して、以下の2つの方法がある。①2次元模型の断面周りに設けた圧力孔から圧力分布を計測し、その積分値である変動空気力と変動風速から伝達関数を求める方法<sup>13)~15)</sup>、②2次元模型の両端に設置されたロードセルを介して、模型全体に作用する変動空気力を計測する方法<sup>10),12)</sup>などがあり、一般的には後者による方法が用いられる。②の方法では、変動空気力は変動風速の気流直角水水平方向の空間相関を介して与えられるために、空力アドミッタンスはその空

\*1 日立造船(株)鉄構・建機事業本部 設計本部 部長 工博  
Hitachi Zosen Corp., Steel Structure & Construction Machinery Headquarters, General Manager, Dr. Eng.

\*2 (株)ニチゾウテック 技術コンサルティング本部 課長代理 工博  
Nichizo Tech Inc., Technology Headquarters, Deputy Manager, Dr. Eng.

(原稿受理：平成11年7月30日)

間相関の計測値を用いて逆解析する必要がある。この時、空間相関を適当な関数形で近似する必要があるが<sup>10,16)</sup>、関数形の近似度合いが空力アドミッタンスの推定誤差に大きく影響するものと考えられる。

そこで、著者の一人は、翼列・平板列によるアクティブ乱流発生装置を用いて気流直角水平方向の気流の空間相関が非常に高い2次元変動風中において2次元模型全体に作用する揚力に関する空力アドミッタンスを計測し<sup>17)</sup>、断面形状や乱れ特性による空力アドミッタンスの違いについて調査した。このように2次元に近い変動風を用いることにより、先に述べた空間相関の定式化に伴う推定誤差はかなり改善されるものと考えられる。しかし、変動風速と変動空力の空間相関が異なることを指摘する研究例<sup>13)~15)</sup>もあり、3次元的な気流特性（特に、空間相関）が空力生成に及ぼす影響については更なる検討を要するものと考えられる。

以上のような背景のもと、著者らは、従来のように2次元模型において計測された変動空力から空力アドミッタンスを直接算定するのではなく、非定常空力を用いて間接的に推定する方法を本稿において提案する。非定常空力はフラッター解析等に必要であるため計測されることが多い。本法によれば、ここで得られた情報が空力アドミッタンスの推定に利用できることになり、省力化の観点からも意義深い。

本方法は薄翼に対する *Sears* 関数の理論的な誘導過程に倣い、薄翼の非定常空力の動的効果を表す *Theodorsen* 関数と等価な関数（本論文では、白石・松本らの研究<sup>18)</sup>に従い、等価 *Theodorsen* 関数と呼ぶ）を橋梁断面等において求め、それを *Sears* 関数の理論式に適用することに特徴がある。

このように非定常空力を用いる理由は、著者の一人が行った過去の計測<sup>19)</sup>においても剥離の影響が少ない偏平箱桁断面において理論空力にほぼ等しい計測値が得られるなど、計測方法がほぼ確立しており、信頼性が高いことが挙げられる。

本論文では、まず、翼断面の非定常空力の計測値より揚力及び空力モーメントの空力アドミッタンスを推定し、空力アドミッタンスの計測値との比較を通して推定精度を検証した。さらに、偏平箱桁断面について推定値と計測値の比較を行い、本手法の適用性を検討した。なお、空力アドミッタンスの計

測に際しては、アクティブ乱流発生装置<sup>20)</sup>による2次元的な変動風を作用させた。

## 2. 正弦的な鉛直ガストが作用する薄翼の非定常空力（*Sears* 関数の誘導）<sup>21)</sup>

本章では、正弦的な鉛直ガストが作用する薄翼の非定常空力の理論的な取り扱いについて概説する。正弦的な鉛直ガストによる非定常空力の誘導は、*W.R.Sears* によりなされたものであるが、理論式の誘導に当たっては調和振動する薄翼に作用する非定常空力理論が応用されている。

そこで、まず、鉛直たわみ及びびねじれの任意モードで調和振動する薄翼に作用する非定常空力の誘導について概説し、続いて正弦的な鉛直ガストが作用する場合の非定常空力の誘導について述べる。

### 2. 1 任意モードで調和振動する薄翼に作用する非定常空力

鉛直たわみおよびびねじれの任意モードで調和振動する薄翼上の任意点における相対鉛直速度  $v$  は次式のようにフーリエ級数で表すことができる。

$$v(\theta, t) = -Ue^{i\omega t} \left( P_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\theta \right) \quad (1)$$

ここに、 $x = \cos \theta$ （前縁で  $\theta = \pi$ ，後縁で  $\theta = 0$ ）

$U$ ：主流方向成分の流速

$\omega$ ：円振動数

$$Ue^{i\omega t} P_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(\theta, t) d\theta \quad (2)$$

$$Ue^{i\omega t} P_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v(\theta, t) \cos n\theta d\theta$$

この時、式(1)で表される相対鉛直速度による揚力分布も同様に次式で示すようにフーリエ級数を用いて表される。

$$l(\theta, t) = \rho U^2 e^{i\omega t} \left( 2\alpha_0 \tan \frac{\theta}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin n\theta \right) \quad (3)$$

ここに、 $\alpha_n = C(k)(P_0 + P_1) - P_1$

$$\alpha_n = \frac{ik}{2n} P_{n-1} + P_n - \frac{ik}{2n} P_{n+1} \quad (n \geq 1) \quad (4)$$

このように揚力分布をフーリエ級数で表しておけば、その係数を変更することにより任意の揚力分布

を与えることができる。さらに、揚力あるいは空力モーメントは、上述の揚力分布を翼面に沿って積分することにより次式で与えられる。

$$L = 2\pi \rho U^2 e^{i\omega t} \left[ (P_0 + P_1) C(k) + (P_0 - P_2) \frac{ik}{2} \right] \quad (5)$$

$$M_{1,2} = \pi \rho U^2 e^{i\omega t} \left\{ P_0 C(k) - P_1 [l - C(k)] - (P_1 - P_3) \frac{ik}{4} - P_2 \right\} \quad (6)$$

ここに、 $C(k) = F(k) + iG(k)$  : Theodorsen 関数

$k (= b\omega/U)$  : 換算振動数

$\rho$  : 空気密度

$b$  : 半弦長

## 2. 2 Sears 関数の誘導

速度  $U$  で飛行する薄翼に正弦的な鉛直ガストが作用する場合の揚力について考える。  $x$  座標軸を翼面に固定すると、鉛直ガストは次式で示される流速分布で表現される (Fig.1)。

$$w(x, t) = W e^{i\omega(t-x/U)} \quad (7)$$

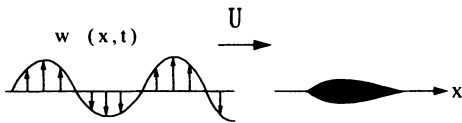


Fig.1 薄翼に作用する正弦的な鉛直ガスト (Sinusoidal wind gust acting on a thin airfoil)

式(7)は流速  $U$  で飛行している翼が流速変動幅  $W$  を持つ正弦的に変動する突風圏内を通り過ぎることを表現したものである。これは航空機を想定したものであるが、橋梁を想定した場合には、同様の突風が流速  $U$  で橋梁に接近することを表現したものとみることができる。

次に、吹き上げの鉛直ガスト  $w(x, t)$  を正と定義すれば、薄翼の任意ポイントにおける相対鉛直速度は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -W e^{i\omega t} e^{-i(\omega U/U) \cos \theta} \\ &= -W e^{i\omega t} e^{-ik \cos \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、式(8)は、次式で示される恒等式により、式(1)で示されるような一般的な形式に置き換えられる。

$$e^{i\zeta \cos \theta} = J_0(\zeta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\zeta) \cos n\theta \quad (9)$$

ここに、 $J_0(\zeta)$  は 0 次ベッセル関数で、 $J_n(\zeta)$  は  $n$  次ベッセル関数である。

また、 $z = -k$  と置き、 $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$  の関係式を利用することにより、式(8)と式(9)から相対鉛直速度は次式により表すことができる。

$$v(x, t) = -W e^{i\omega t} \left[ J_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(k) \cos n\theta \right] \quad (10)$$

式(1)と式(10)を比較すれば、式(3)と式(4)から揚力および空力モーメントは次式のようになる。

$$L = \pi \rho c U W e^{i\omega t} \left\{ [J_0(k) - iJ_1(k)] C(k) + [J_0(k) + J_2(k)] \frac{ik}{2} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= \left( \frac{\pi}{4} \right) \rho c^2 U W e^{i\omega t} \left\{ J_0(k) C(k) + iJ_1(k) [l - C(k)] \right. \\ &\quad \left. + [iJ_1(k) + iJ_3(k)] \frac{ik}{4} + J_2(k) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $c$  : 翼弦長

さらに、式(11)および式(12)はベッセル関数の漸化式を利用することにより簡略化され、最終的に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} L &= \pi \rho c U W e^{i\omega t} \phi(k) \\ M_{1,2} &= L \cdot \frac{c}{4} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、

$$\phi(k) = [J_0(k) - iJ_1(k)] C(k) + iJ_1(k) \quad (14)$$

式(13)から揚力の作用点が前縁から  $1/4$  弦長点にあることがわかる。また、 $\phi(k)$  は鉛直ガストに対する周波数応答関数 (空力アドミッタンス) であり、Sears 関数と呼ばれ、その絶対値は次式で表される。

$$\begin{aligned} |\phi(k)|^2 &= (J_0^2 + J_1^2) (F^2 + G^2) \\ &\quad + J_1^2 + 2J_0 J_1 G - 2J_1^2 F \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)は、ベッセル関数を含む複雑な式であるために、以下のような近似式<sup>2)</sup>が提案されている。

$$|\phi(k)|^2 = \frac{a+k}{a+(\pi a+1)k+2\pi k^2} \quad (16)$$

( $a=0.1811$ )

$$|\phi(k)|^2 = \frac{1}{1+2\pi k} \quad (17)$$

以上、薄翼に対する2種類の非定常空気力の理論展開について概説したが、前者は物体の運動に伴って生じる空気力であり、自励空気力と呼ばれる空気力である。後者は静止物体に作用する接近流によってもたらされる空気力であり、強制空気力と呼ばれる空気力である。

そして、正弦的な鉛直ガストが作用する薄翼の非定常空気力は、調和振動下の薄翼に作用する相対鉛直速度を鉛直ガストによる相対鉛直速度に置き換えることにより誘導されており、いずれも準静的空気力に対する動的効果を表す *Theodorsen* 関数  $C(k)$  が用いられていることは興味深い。この *Theodorsen* 関数については、以下の章で詳述する。

### 3. 薄翼及び橋梁断面の非定常空気力と *Theodorsen* 関数

本章では、薄翼の非定常空気力理論<sup>21)~23)</sup>で非常に重要な役割を演じる *Theodorsen* 関数について述べる。さらに、*Scanlan* ら<sup>24) 25)</sup>により、提案された橋梁断面の非定常空気力の取扱いについて述べ、理論空気力との関係を整理する。

#### 3. 1 薄翼の非定常空気力とその空気力における *Theodorsen* 関数の役割

任意運動する薄翼に作用する非定常空気力は、翼回りの循環に起因した空気力と付加質量に起因した空気力の項に分けられ、各々次式により表される。式中の記号の定義を Fig.2 に示す。

$$L_h = -(L_1 + L_2 + L_3) \quad (18)$$

$$M_a = \left(\frac{1}{2} + a\right)bL_1 + abL_2 - \left(\frac{1}{2} - a\right)bL_3 + M_a \quad (19)$$

$$L_1(\tau) = 2\pi b \rho U \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau - \tau_0) \frac{dw}{d\tau_0}(\tau_0) d\tau_0 \quad (20a)$$

$$w(\tau) = U\alpha(\tau) + \frac{U}{b}h'(\tau) + \left(\frac{1}{2} - a\right)U\alpha'(\tau) \quad (20b)$$

$$L_2 = \rho\pi b^2(\ddot{h} - ab\ddot{\alpha}) = \rho\pi U^2(h'' - ab\alpha'') \quad (21)$$

$$L_3 = \rho\pi b^2 U \dot{\alpha} = \rho\pi b U^2 \alpha' \quad (22)$$

$$M_a = -\frac{\rho\pi b^4}{8}\ddot{\alpha} = -\frac{\rho\pi b^2 U^2}{8}\alpha'' \quad (23)$$

ここに、 $\tau = Ut/b$  : 無次元時間

( ) =  $d$ ( ) /  $d\tau$

( $\cdot$ ) =  $d$ ( ) /  $dt$

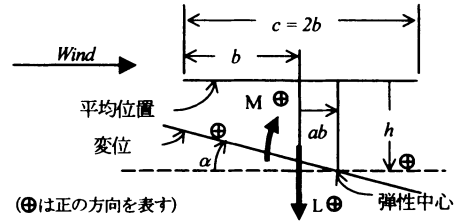


Fig.2 記号の定義 (Notations)

上式の中で、 $L_1$ が循環に起因した空気力であり、式中の $\Phi(\tau)$ は *Wagner* 関数と呼ばれ、相対鉛直速度の急変に対する循環揚力の時間的生長を表している。また、上述の式から、①薄翼の循環揚力は 3/4 弦長点における鉛直流速、式(20b)により決定されることと②その揚力の作用点が 1/4 弦長点にあることが分かる。これは *bluff* な橋梁断面には当てはまらないため薄翼と橋梁断面の非定常空気力の違いを議論する際の重要なポイントとなる。なお、*Wagner* 関数の正確な表記は、修正ベッセル関数を用いて表されるが、解析的な検討が容易なように指数関数を用いた以下の近似式が与えられている。

1) *R.T.Jones* 近似式

$$\Phi(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.335e^{-0.3\tau} \quad (24)$$

2) *W.P.Jones* 近似式

$$\Phi(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.041\tau} - 0.335e^{-0.32\tau} \quad (25)$$

また、式(18)~式(23)の特別なケースとして、調和振動する薄翼に対しては、*Wagner* 関数と *Theodorsen* 関数との間の関係式(26)を用いることにより、式(27)、式(28)のように表すことができる。

$$C(k) = ikF[\Phi(\tau)] \quad (26)$$

(Theodorsen 関数は Wagner 関数のフーリエ変換  $F[\ ]$  で表される)

$$L_h = -\rho b^2 \{ U\pi\dot{\alpha} + \pi\dot{h} - \pi b a \ddot{\alpha} \} - 2\pi\rho Ub C(k) \left[ U\alpha + \dot{h} + b\left(\frac{l}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (27)$$

$$M_\alpha = -\rho b^2 \left\{ \pi\left(\frac{l}{2} - a\right) Ub\dot{\alpha} + \pi b^2 \left(\frac{l}{8} + a^2\right) \ddot{\alpha} - a\pi b \dot{h} \right\} + 2\rho Ub^2 \pi\left(\frac{l}{2} + a\right) C(k) \left[ U\alpha + \dot{h} + b\left(\frac{l}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] \quad (28)$$

また、上式から Theodorsen 関数  $C(k)$  の物理的意味を考察すると<sup>26)</sup>、準静的な空気力  $[-2\pi\rho Ub\{U\alpha + \dot{h} + b(l/2 - a)\dot{\alpha}\}]$  に対する動的効果を表す関数と見なすことができる。具体的には、Theodorsen 関数により準静的空気力は  $|C(k)|$  倍され、 $\theta = \tan^{-1}(G/F)$  分だけ位相遅れを生ずる。なお、Theodorsen 関数は Wagner 関数に対する近似式(24)を用いれば、式(26)の関係を用いることにより、次式のように表すことができる。

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k}i} \quad (29)$$

### 3. 2 橋梁断面の非定常空気力と理論空気力の関係 (Scanlan らの研究<sup>24), 25)</sup>

橋梁断面の非定常空気力は、物体回りの剥離を伴う複雑な流れ場により、先に述べたような理論的な取り扱いが難しく、実験的に非定常空気力を同定する必要がある。そこで、Scanlan らは、橋梁などの一般土木構造物にも適用できるように、翼理論にならって非定常空気力を  $H_i^*$  と  $A_i^*$  ( $i=1\sim 4$ ) を用いた以下の式で表している。

$$L_h = \frac{1}{2}\rho U^2 B \left[ KH_1^*(k)\frac{\dot{h}}{U} + KH_2^*(k)\frac{B\ddot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^*(k)\alpha + K^2 H_4^*(k)\frac{\dot{h}}{B} \right] \quad (30)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left[ KA_1^*(k)\frac{\dot{h}}{U} + KA_2^*(k)\frac{B\ddot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^*(k)\alpha + K^2 A_4^*(k)\frac{\dot{h}}{B} \right] \quad (31)$$

ここに、 $K=B\omega/U$ : 換算振動数、 $B(=2b)$ : 橋床幅

本論文では、計測された非定常空気力を式(30)および式(31)に従い、 $H_i^*$  と  $A_i^*$  を用いて整理している。また、 $H_i^*$  および  $A_i^*$  は、式(27)および式(28)で示される理論空気力と以下のように関係付けられる。

$$K^2 H_1^* = -2\pi KF \quad (32a)$$

$$K^2 H_2^* = \frac{-\pi K}{2} \left[ 1 + \frac{4G}{K} + 2\left(\frac{l}{2} - a\right)F \right] \quad (32b)$$

$$K^2 H_3^* = -\pi \left[ 2F - \left(\frac{l}{2} - a\right)GK + \frac{aK^2}{4} \right] \quad (32c)$$

$$K^2 H_4^* = \frac{\pi}{2} K^2 \left[ 1 + \frac{4G}{K} \right] \quad (32d)$$

$$K^2 A_1^* = \pi KF \left(\frac{l}{2} + a\right) \quad (32e)$$

$$K^2 A_2^* = \frac{-\pi}{2} \left[ \frac{K\left(\frac{l}{2} - a\right)}{2} - 2G\left(a + \frac{l}{2}\right) + KF\left(a^2 - \frac{l}{4}\right) \right] \quad (32f)$$

$$K^2 A_3^* = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{K^2}{4} \left(a^2 + \frac{l}{8}\right) + 2F\left(a + \frac{l}{2}\right) + KG\left(a^2 - \frac{l}{4}\right) \right] \quad (32g)$$

$$K^2 A_4^* = \frac{-\pi}{2} \left[ \frac{aK^2}{2} + 2KG\left(a + \frac{l}{2}\right) \right] \quad (32h)$$

### 4. 等価 Wagner 関数と等価 Theodorsen 関数<sup>27)~29)</sup>

相対鉛直速度の急変に伴う揚力の過渡応答特性は、薄翼の場合、Wagner 関数で表され、式(24)や式(25)のように指数関数で近似することができる。

方、橋梁断面においても、薄翼と同様に相対鉛直速度の急変に伴う揚力の過渡応答特性を指数関数で近似できるものと仮定すると(以下では、この関数を等価 Wagner 関数と称す)、式(26)の関係式を用いることにより、等価 Theodorsen 関数を定義することができる。なお、橋梁断面は、薄翼と異なり、揚力の作用点が一定でないので、等価 Wagner 関数は揚

力とモーメントに対して別々に定義される。

1) 揚力に関する等価 Wagner 関数  $\Phi_{eq,L}(\tau)$  と等価 Theodorsen 関数  $C_{eq,L}(k)$  の関係

$$\Phi_{eq,L}(\tau) = 1 - c_1 e^{-c_2 \tau} - c_3 e^{-c_4 \tau} \quad (33)$$

$$C_{eq,L}(k) = F_L(k) + iG_L(k) \quad (34)$$

$$F_L(k) = 1 - \frac{c_1 k^2}{k^2 + c_2^2} - \frac{c_3 k^2}{k^2 + c_4^2} \quad (35)$$

$$G_L(k) = - \left( \frac{c_1 c_2 k}{k^2 + c_2^2} + \frac{c_3 c_4 k}{k^2 + c_4^2} \right) \quad (36)$$

2) モーメントに関する等価 Wagner 関数  $\Phi_{eq,M}(\tau)$  と等価 Theodorsen 関数  $C_{eq,M}(k)$  の関係

$$\Phi_{eq,M}(\tau) = 1 - d_1 e^{-d_2 \tau} - d_3 e^{-d_4 \tau} \quad (37)$$

$$C_{eq,M}(k) = F_M(k) + iG_M(k) \quad (38)$$

$$F_M(k) = 1 - \frac{d_1 k^2}{k^2 + d_2^2} - \frac{d_3 k^2}{k^2 + d_4^2} \quad (39)$$

$$G_M(k) = - \left( \frac{d_1 d_2 k}{k^2 + d_2^2} + \frac{d_3 d_4 k}{k^2 + d_4^2} \right) \quad (40)$$

ここに、 $c_1 \sim c_4$  および  $d_1 \sim d_4$  は未知パラメータであり、各橋梁断面固有の値である。

また、揚力係数勾配  $dC_F/d\alpha$  ( $=dC_L/d\alpha + C_D$ ) やモーメント係数勾配  $dC_M/d\alpha$  も薄翼に対する  $2\pi$  や  $\pi/2$  と異なるために、橋梁断面固有の値となる。橋梁断面の揚力係数勾配やモーメント係数勾配を考慮した場合、式(20a)は次式のように書き換えられる。

$$L_i(\tau) = \rho U b \frac{dC_F}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\tau} \Phi_{eq,L}(\tau - \tau_0) \frac{dw}{d\tau_0} d\tau_0 \quad (41)$$

$$M_i(\tau) = 2\rho b^2 U \frac{dC_M}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\tau} \Phi_{eq,M}(\tau - \tau_0) \frac{dw}{d\tau_0} d\tau_0 \quad (42)$$

上述のように、薄翼の理論を適用する場合、3/4 弦長点における鉛直流速  $w$  により循環揚力が決定されるが、橋梁断面は剥離を伴う鈍い断面であるこ

とから必ずしも当てはまらない。また、橋梁断面に作用する非定常空気が循環に起因したものと剥離流れに起因したといずれによるものなのか不明確である。これらは橋梁断面固有のものと考えられる。

しかし、本論文では、薄翼の非定常空気力理論にならない、式(20b)で表されるものと仮定した。従って、等価 Theodorsen 関数が等価 Wagner 関数のフーリエ変換で表されることから、式(27)および式(28)は次式により書き換えられる。なお、次式では  $\ddot{\alpha}$  および  $\dot{h}$  に関する付加質量の項は橋梁断面では影響が小さいものとして無視する。また、理論の簡略化のために弾性中心と橋梁断面中心が一致するとして、 $a=0$  とする。

$$L_h = -\pi \rho b^2 U \dot{\alpha} - \rho b U \frac{dC_F}{d\alpha} \left\{ F_L \left( U\alpha + \dot{h} + \frac{b}{2} \dot{\alpha} \right) + G_L \left( \frac{U}{\omega} \dot{\alpha} - \omega h - \frac{b\omega}{2} \alpha \right) \right\} \quad (43)$$

$$M_a = -\frac{1}{2} \pi \rho b^3 U \dot{\alpha} + 2\rho b^2 U \frac{dC_M}{d\alpha} \left\{ F_M \left( U\alpha + \dot{h} + \frac{b}{2} \dot{\alpha} \right) + G_M \left( \frac{U}{\omega} \dot{\alpha} - \omega h - \frac{b\omega}{2} \alpha \right) \right\} \quad (44)$$

また、式(43)、(44)と式(30)、(31)との対比から  $H_i^*$  と  $A_i^*$  の関係は次式により表される。

$$K^2 H_1^* = -\frac{dC_F}{d\alpha} K F_L \quad (45a)$$

$$K^2 H_2^* = -\frac{K}{2} \left[ \pi + \frac{dC_F}{d\alpha} \frac{F_L}{2} + 2 \frac{dC_F}{d\alpha} \frac{G_L}{K} \right] \quad (45b)$$

$$K^2 H_3^* = -\frac{1}{2} \frac{dC_F}{d\alpha} \left[ 2F_L - \frac{G_L K}{2} \right] \quad (45c)$$

$$K^2 H_4^* = \frac{dC_F}{d\alpha} K G_L \quad (45d)$$

$$K^2 A_1^* = \frac{dC_M}{d\alpha} K F_M \quad (45e)$$

$$K^2 A_2^* = - \left[ \frac{\pi}{8} K - \frac{dC_M}{d\alpha} \frac{F_M}{4} K - \frac{dC_M}{d\alpha} G_M \right] \quad (45f)$$

$$K^2 A_3^* = \frac{dC_M}{d\alpha} \left[ F_M - \frac{K G_M}{4} \right] \quad (45g)$$

$$K^2 A_4^* = -\frac{dC_M}{d\alpha} K G_M \quad (45h)$$

## 5. 等価 Theodorsen 関数を用いた空力アドミッタンスの算定

等価 Theodorsen 関数は、橋梁断面の準静的空気力に対する動的効果を表すものとして、薄翼に対する Theodorsen 関数と対応するものと考えられる。第1章で Sears 関数の誘導について述べたが、それは、調和振動する薄翼の非定常空気力理論を鉛直ガストが作用する場合に拡張したものと理解することができる。調和振動する場合と鉛直ガストが作用する場合で薄翼に作用する相対鉛直速度は異なるものの、各々の相対鉛直速度に対する循環揚力は、Theodorsen 関数を介して決定される。

これらのことから、式(14)の Theodorsen 関数  $C(k)$  を等価 Theodorsen 関数  $C_{eq}(k)$  と置くことにより、Sears 関数と等価な関数（本論文では、等価 Sears 関数と呼ぶ）を定義することが可能と考えられる。この等価 Sears 関数は、橋梁断面により揚力の作用点が一様でないために揚力およびモーメントの各々に対して定義され、また、揚力係数勾配やモーメント係数勾配も各橋梁断面により異なるために、最終的に式(13)は次式のように書き換えられる。

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 B \frac{dC_F}{d\alpha} \left( \frac{W}{U} \right) e^{i\omega t} \phi_L(k) \quad (46)$$

$$M_{12} = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \frac{dC_M}{d\alpha} \left( \frac{W}{U} \right) e^{i\omega t} \phi_M(k) \quad (47)$$

（注：式(13)中の翼弦長  $c$  は、橋梁断面の橋床幅  $B$  に置き換えられている）

ここに、

揚力に関する等価 Sears 関数

$$\phi_L(k) = [J_0(k) - iJ_1(k)] C_{eq,L}(k) + iJ_1(k) \quad (48)$$

モーメントに関する等価 Sears 関数

$$\phi_M(k) = [J_0(k) - iJ_1(k)] C_{eq,M}(k) + iJ_1(k) \quad (49)$$

さらに、各々の等価 Sears 関数の絶対値は、次式で与えられる。

揚力に関する等価 Sears 関数

$$\begin{aligned} |\phi_L(k)|^2 &= (J_0^2 + J_1^2) (F_L^2 + G_L^2) \\ &\quad + J_1^2 + 2J_0 J_1 G_L - 2J_1^2 F_L \end{aligned} \quad (50)$$

空力モーメントに関する等価 Sears 関数

$$\begin{aligned} |\phi_M(k)|^2 &= (J_0^2 + J_1^2) (F_M^2 + G_M^2) \\ &\quad + J_1^2 + 2J_0 J_1 G_M - 2J_1^2 F_M \end{aligned} \quad (51)$$

式(48)～(51)の等価 Sears 関数の計算は従来煩雑であった。しかし、最近では、Microsoft 社の Excel などによればベッセル関数が組み込まれているため、容易に計算ができる。

## 6. 等価 Theodorsen 関数の同定

第4章において、 $H_i^*$  と  $A_i^*$  で表される橋梁断面の非定常空気力と等価 Theodorsen 関数との関係について述べた。そこで、橋梁断面の非定常空気力の計測値から等価 Theodorsen 関数を同定する方法について述べる。

具体的には、計測された非定常空気力を  $H_i^*$  と  $A_i^*$  の形で整理し、式(45a)～式(45h)の関係を利用して等価 Theodorsen 関数を同定する。等価 Theodorsen 関数の実部  $F_L$ 、 $F_M$  および虚部  $G_L$ 、 $G_M$  は未知パラメータである  $c_1 \sim c_4$  および  $d_1 \sim d_4$  の非線形関数で表されることから、最終的には非線形関数のパラメータ同定問題に帰着される。

なお、 $dC_F/d\alpha$  と  $dC_M/d\alpha$  も未知パラメータと考えられるので各々  $c_5$  と  $d_5$  として、以下、同定問題として定式化するものとする。

そこで、本論文では、非線形関数の未知パラメータを同定する手法として、1) 拡張カルマンフィルタを用いた同定手法 (EK-WGI 法<sup>30)</sup>) と 2) 文献27) に従い Newton-Raphson 法を適用した。本論文では、同定手法による同定結果の違いも比較している。

以下では、各々の同定法について詳述する。

### 6. 1 EK-WGI 法を用いた同定手法

拡張カルマンフィルタは線形システムの最適状態推定のカルマンフィルタに対して、より一般的に非線形システムに対しても適用できるように拡張されたものである。一般的に拡張カルマンフィルタの基本式である非線形の状態方程式および非線形の観測方程式はそれぞれ式(52)、式(53)のように示される。

$$\frac{dx_i}{dt} = g(x_i, t_k) + G_i w_i \quad (52)$$

$$y_{ik} = h(x_{ik}, t_k) + v_k \quad (53)$$

ここに、

$x_i, x_{ik}$  : それぞれ連続型、離散型の状態ベクトル

$y_{ik}$  :  $t_k$  時間での観測ベクトル

$w_i, v_i$  : 状態方程式及び観測方程式に付加される  
ガウス性ホワイトノイズ

$G_i$  : 変換行列

そして、本論文では、星谷らが開発した *EK-WGI* 法を適用する。通常、拡張カルマンフィルターでは、初期状態ベクトル、初期推定誤差の共分散行列およびノイズの分散が与えられれば、測定値  $y_{ik}$  を順次取り込みながら状態ベクトルの最適推定値を順次求めていくことになるが、さらに、*EK-WGI* 法では、推定誤差の共分散行列に重み付けをおこないながらグローバルに最適推定を行い、同定計算の安定化を図っている。

以下、計測された非正常空気力係数  $H_i^*$  を観測ベクトルとして未知パラメータ  $c_1 \sim c_5$  を同定することを考える。

今、未知パラメータ  $c_1 \sim c_5$  を状態ベクトル ( $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3, x_4 = c_4, x_5 = c_5$ ) すると、式(52)に相当する状態方程式は式(54)で表される。

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix}_{K+1} = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix}_K \quad (54)$$

次に、計測された非正常空気力係数  $H_i^*$  を観測ベクトルとすると、観測方程式は以下のように定式化される。

$$\begin{Bmatrix} y_{H_1^*}(K) \\ y_{H_2^*}(K) \\ y_{H_3^*}(K) \\ y_{H_4^*}(K) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\tilde{F}_L}{K} \\ -\frac{1}{2K} \left[ \pi + \frac{\tilde{F}_L}{2} + \frac{2\tilde{G}_L}{K} \right] \\ -\frac{1}{2K^2} \left[ 2\tilde{F}_L - \frac{\tilde{G}_L K}{2} \right] \\ \frac{\tilde{G}_L}{K} \end{Bmatrix} + v_K \quad (55)$$

ここに、 $\tilde{F}_L$  および  $\tilde{G}_L$  はパラメータ  $x_5$  を含む揚力に関する等価 *Theodorsen* 関数であり、以下のよう  
に定式化される。

$$\tilde{F}_L(K) = x_5 F_L(K) \quad , \quad \tilde{G}_L(K) = x_5 G_L(K) \quad (56a)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_L(K) &= 1 - \frac{x_1 K^2}{K^2 + x_2^2} - \frac{x_3 K^2}{K^2 + x_4^2} \\ G_L(K) &= - \left( \frac{x_1 x_2 K}{K^2 + x_2^2} + \frac{x_3 x_4 K}{K^2 + x_4^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (56b)$$

また、観測方程式は式(55)のように表されるが、状態ベクトルに対する変換行列  $M[K_j; x_j]$  は次式で定式化される。

$$M[K_j; x_j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{H_1^*}(K_j, x_j)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_{H_1^*}(K_j, x_j)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial h_{H_2^*}(K_j, x_j)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_{H_2^*}(K_j, x_j)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial h_{H_3^*}(K_j, x_j)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_{H_3^*}(K_j, x_j)}{\partial x_5} \\ \frac{\partial h_{H_4^*}(K_j, x_j)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_{H_4^*}(K_j, x_j)}{\partial x_5} \end{bmatrix} \quad (57)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_{H_1^*}(K_j, x_j)}{\partial x_i} &= -\frac{1}{K} \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_i} \\ \frac{\partial h_{H_2^*}(K_j, x_j)}{\partial x_i} &= -\frac{1}{2K} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_i} + \frac{2}{K} \frac{\partial \tilde{G}_L}{\partial x_i} \right] \\ \frac{\partial h_{H_3^*}(K_j, x_j)}{\partial x_i} &= -\frac{1}{2K^2} \left[ 2 \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_i} - \frac{K}{2} \frac{\partial \tilde{G}_L}{\partial x_i} \right] \\ \frac{\partial h_{H_4^*}(K_j, x_j)}{\partial x_i} &= \frac{1}{K} \frac{\partial \tilde{G}_L}{\partial x_i} \quad (i = 1 \sim 5) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_1} &= -\frac{x_5 K^2}{K^2 + x_2^2} & \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_2} &= \frac{2x_1 x_2 x_5 K^2}{(K^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_3} &= -\frac{x_5 K^2}{K^2 + x_4^2} & \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_4} &= \frac{2x_3 x_4 x_5 K^2}{(K^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial \tilde{F}_L}{\partial x_5} &= F_L(K) \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}_l}{\partial x_1} &= -\frac{x_2 x_3 K}{K^2 + x_2^2} \\ \frac{\partial \tilde{G}_l}{\partial x_2} &= -\frac{x_1 x_3 K}{K^2 + x_2^2} + \frac{2x_1 x_2 x_3 K}{(K^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial \tilde{G}_l}{\partial x_3} &= -\frac{x_1 x_2 K}{K^2 + x_3^2} \\ \frac{\partial \tilde{G}_l}{\partial x_4} &= -\frac{x_3 x_5 K}{K^2 + x_4^2} + \frac{2x_3 x_4 x_5 K}{(K^2 + x_4^2)^2} \\ \frac{\partial \tilde{G}_l}{\partial x_5} &= G_l(K) \end{aligned} \right\} (59b)$$

以上は、計測された非定常空気力係数  $H_i^*$  を用いて、揚力に関する等価 *Theodorsen* 関数を算定するための定式化について述べたが、空力モーメントに関する等価 *Theodorsen* 関数も同様に  $A_i^*$  を用いて定式化される。

状態ベクトルの初期値と推定誤差の共分散行列の初期値を与えて、各風速ステップごとに計測された  $H_i^*$  および  $A_i^*$  を順次読み込みながら計測値に適合する未知パラメータの同定計算を行う。この時、初期値の与え方により、同定値の収束精度に差異が生ずるために静的空気力に相当する状態ベクトル  $x_s$  については、風洞試験により得られた静的空気力係数  $dC_f/d\alpha$  と  $dC_m/d\alpha$  を初期値として与え、同定結果が物理的に整合するように配慮した。

## 6. 2 Newton-Raphson 法を用いた同定手法

本同定手法は、*Newton-Raphson* 法による非線形最小二乗法を拡張したものである。ここでは、計測された  $H_i^*$  を用いて、揚力に関する等価 *Theodorsen* 関数を算定するための定式化について述べるが、モーメントに関する等価 *Theodorsen* 関数も同様に  $A_i^*$  を用いて定式化される。

まず、目的関数を次式のように定義する。

$$E^2 = \sum_{j=1}^N s_j^2 \quad (60)$$

ここに、 $N$ : データ個数

$$s_j^2 = \sum_{i=1}^4 \{H_i^*(c_r, K_j) - H_{ij}^*\}^2 \quad (61)$$

なお、式中の  $H_{ij}^*$  は  $j$  番目の計測値を示している。

次に、 $H_i^*(c_r, K)$  を未知パラメータ  $c_r$  について 1 次のテイラー展開すると、次式が得られる。

$$H_i^*(c_r, K_j) = H_i^*(c_{r0}, K_j) + \sum_{r=1}^5 \frac{\partial H_i^*}{\partial c_r} \delta c_r \quad (62)$$

ここに

$$\begin{aligned} \delta c_r &= c_r - c_{r0} \\ c_{r0} &: \text{初期推定値} \end{aligned}$$

式(62)から計測値  $H_{ij}^*$  を引き、 $H_i^*$  との誤差  $r_{ij}$  と推定誤差  $e_{ij}$  との関係を求めると、次式が得られる。

$$r_{ij} = e_{ij} + \sum_{r=1}^5 \frac{\partial H_i^*}{\partial c_r} \delta c_r \quad (63)$$

$$s_j^2 = \sum_{i=1}^4 r_{ij}^2 \quad (64)$$

目的関数  $E^2$  を最小にする  $c_r$  は  $E^2$  の  $c_r$  による偏微分が 0 になるときであるから、次式を満足することになる。

$$\frac{\partial E^2}{\partial c_r} = 0 \quad (65)$$

結局、式(60)の中に式(64)を代入し、 $c_r$  による偏微分を求め、整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} A \{ \delta c \} &= - \{ R \} \\ \{ \delta c \} &= \{ \delta c_1, \dots, \delta c_5 \}^T \end{aligned} \quad (66)$$

ここに、

$$\begin{aligned} A_{tm} &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial H_1^*}{\partial c_r} \frac{\partial H_1^*}{\partial c_m} + \frac{\partial H_2^*}{\partial c_r} \frac{\partial H_2^*}{\partial c_m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial H_3^*}{\partial c_r} \frac{\partial H_3^*}{\partial c_m} + \frac{\partial H_4^*}{\partial c_r} \frac{\partial H_4^*}{\partial c_m} \right) \\ R_m &= \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial H_1^*}{\partial c_m} e_{1j} + \frac{\partial H_2^*}{\partial c_m} e_{2j} + \frac{\partial H_3^*}{\partial c_m} e_{3j} + \frac{\partial H_4^*}{\partial c_m} e_{4j} \right) \end{aligned} \quad (67)$$

これより、

$$\{ \delta c \} = -A^{-1} \{ R \} \quad (68)$$

を求め、初期値  $\{c\}_0$  を代入して、 $\{ \delta c \}$  を求める。さらに、次のステップで  $\{c\}_1 = \{c\}_0 + \{ \delta c \}$  を式(68)に代入して、新たな  $\{ \delta c \}$  を求める。このような繰り返し計算を  $\{ \delta c \}$  が収束するまで繰り返す。

なお、本論文では、式(68)のかわりに、さらに収束の安定化を図るために次式を用いた<sup>3)</sup>。

$$\{ \delta c \} = -(A + rD)^{-1} \{ R \} \quad (69)$$

ここに、 $D$  は行列  $A$  の対角要素であり、 $\gamma$  は安定化を図るための *Damping* 係数と呼ばれるものである。 $\gamma$  は通常  $0 < \gamma < 1$  程度の値が用いられる (本研究では、 $\gamma = 0.75$  とした)。この方法は *Damped Least Square* 法と呼ばれ、以下では *DLS* 法と略称する。

## 7. 実験概要

本章では、空力アドミッタンスを実験的に算定する方法について述べる。

### 7. 1 空力アドミッタンスの実験的評価法

本研究では、剛支持された 2 次元模型に作用する空気力と変動風から算定される伝達関数より空力アドミッタンスを算定した。この時、模型全体に作用する揚力および空力モーメントのパワースペクトル密度関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_L(f) &= \tilde{S}_L(f) |J(f)|^2 \cdot \ell^2 \\ S_M(f) &= \tilde{S}_M(f) |J(f)|^2 \cdot \ell^2 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

ここに、 $f$  は周波数(Hz)である。また、 $S_L(f)$ 、 $S_M(f)$  は各々模型全体に作用する揚力及び空力モーメントのパワースペクトル密度関数であり、単位長当たりの揚力及び空力モーメントのパワースペクトル密度関数  $\tilde{S}_L(f)$ 、 $\tilde{S}_M(f)$  に変動風の気流直角水平方向におけるジョイントアクセプタンス関数  $|J(f)|^2$  および模型長  $\ell$  の二乗を乗じたものとして表される。

また、単位長当たりの揚力及び空力モーメントのパワースペクトル密度関数  $\tilde{S}_L(f)$ 、 $\tilde{S}_M(f)$  と変動風の気流直角水平方向におけるジョイントアクセプタンス関数  $|J(f)|^2$  は次式で表される<sup>22)</sup>。

$$\begin{aligned} \tilde{S}_L(f) &= 4L_1^2 |X_{w,L}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} + L_2^2 |X_{w,L}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} \\ &\quad + 4L_1 L_2 X_{w,L}(f) X_{w,M}(f) \frac{\text{Re}\{S_{w,M}(f)\}}{U^2} \\ L_1 &= \frac{1}{2} \rho U^2 B C_{L_1} \quad , \quad L_2 = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left( \frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \frac{A}{B} \right) \\ \tilde{S}_M(f) &= 4M_1^2 |X_{w,M}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} + M_2^2 |X_{w,M}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} \\ &\quad + 4M_1 M_2 X_{w,L}(f) X_{w,M}(f) \frac{\text{Re}\{S_{w,M}(f)\}}{U^2} \\ M_1 &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{M1} \quad , \quad M_2 = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \frac{dC_M}{d\alpha} \end{aligned} \quad (71)$$

ここに、

$S_w(f)$ 、 $S_w(f)$  : 主流方向及び鉛直方向気流変動のパワースペクトル密度関数

$S_{w,M}(f)$  : 主流方向及び鉛直方向気流変動のクロススペクトル密度関数で、 $\text{Re}\{\dots\}$  は実数部の意味

$X_{w,L}(f)$ 、 $X_{w,L}(f)$  : 揚力に対する主流方向及び鉛直方向気流変動の伝達関数

$X_{w,M}(f)$ 、 $X_{w,M}(f)$  : 空力モーメントに対する主流方向及び鉛直方向気流変動の伝達関数

$$|J(f)|^2 = \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} \text{co-coh}(f; y_1, y_2) dy_1 dy_2 \quad (72)$$

ここに、 $\text{co-coh}(f; y_1, y_2)$  は気流直角水平方向の 2 点  $y_1$  と  $y_2$  における空気力のコ・コヒーレンス関数であり、通常、気流変動のコ・コヒーレンス関数と等しいものと仮定して、気流変動のコ・コヒーレンス関数を用いる。なお、本研究では、剛模型を用いるので、模型の固有モードは 1 となる。そのため式(72)はモード関数の記述を省略している。

式(71)では、揚力及び空力モーメントが主流方向及び鉛直方向気流変動に起因したものと仮定したが、通常、 $L_2$ 、 $M_2$  と比べて  $L_1$ 、 $M_1$  の値が非常に小さいこと (Table.3 を参照のこと) と主流方向及び鉛直方向気流変動のクロス項が無視できることから、近似的に次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}_L(f) &\approx L_1^2 |X_{w,L}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} \\ \tilde{S}_M(f) &\approx M_1^2 |X_{w,M}(f)|^2 \frac{S_w(f)}{U^2} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

従って、揚力及び空力モーメントに関する空力アドミッタンス  $|X_{w,L}(f)|^2$ 、 $|X_{w,M}(f)|^2$  は次式により算定される。

$$\left. \begin{aligned} |X_{w,L}(f)|^2 &\approx \frac{S_L(f)}{\left\{ \frac{1}{2} \rho U B \left( \frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \frac{A}{B} \right) \right\}^2 \cdot S_w(f) |J_w(f)|^2 \cdot \ell^2} \\ |X_{w,M}(f)|^2 &\approx \frac{S_M(f)}{\left( \frac{1}{2} \rho U B^2 \frac{dC_M}{d\alpha} \right)^2 \cdot S_w(f) |J_w(f)|^2 \cdot \ell^2} \\ |J_w(f)|^2 &= \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} \text{co-coh}_w(f; y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

式(74)では、鉛直方向気流変動のみが揚力に寄与すると仮定しているので、ジョイントアクセプタンス関数は鉛直方向気流変動の気流直角水平方向におけるコ・コヒーレンス関数  $co-coh_w(f; y_1, y_2)$  を用いて算定することとした。

## 7. 2 実験装置及び方法

風洞実験は日立造船㈱の大型汎用風洞の2次元モード<sup>19)</sup> (測定断面寸法：幅 2m×高さ 3m) にて

実施した。2次元風路下流側に Fig.3 に示すようなアクティブガストジェネレータを設置し、さらにその下流側に非定常空気力測定装置を設置した。アクティブガストジェネレータの翼列下流端からの模型中央までの距離は 1680mm である。Fig.4 は風洞実験の状況を撮影したものである。写真は非定常空気力測定値の下流端から上流側に向けて撮影したものであり、翼断面模型を用いた実験状況を示している。

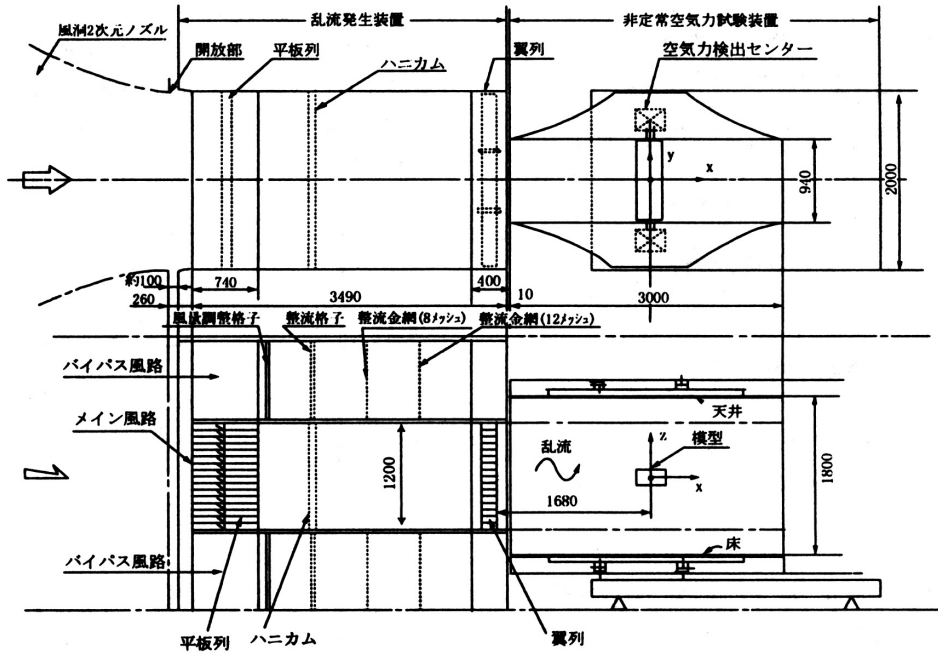


Fig.3 アクティブガストジェネレータ (Active gust generator)

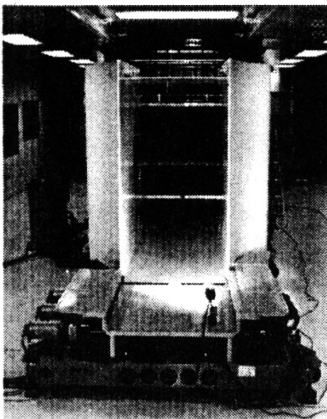


Fig.4 実験装置のセッティング (Setup of experimental facilities)

アクティブガストジェネレータは、翼列及び平板列からなり、平板列を駆動させることにより主流方向の風速変動を、翼列を駆動させることにより気流傾斜角変動を与える。また、本研究で用いたガストジェネレータは、文献20)で示した装置から主風路のメッシュを全て取り除き、ハニカムのみを設置したものとなっている。

乱流生成では、主流方向・鉛直方向成分ともに *Kármán* 型スペクトルに適合するようにガストジェネレータをコンピュータ制御した。

非定常空気力測定装置は、上下・水平・回転の単独加振あるいは任意連成加振時の揚力・抗力・空力モーメントを同時に検出可能である。本研究では、上下・回転の単独加振により非定常空気力係数

$(H_i^*, A_i^*)$  を測定し、さらに、乱流中で模型を静止させた状態での変動空気力も計測した。

対象とする断面は、Fig.5 に示すように NACA0012 の翼断面（翼弦長：400mm，最大翼厚：48mm）と幅高さ比 7.5 の偏平箱桁断面（桁幅：323mm，桁高さ：43mm）を用いた。各模型とも模型長さは 920mm である。

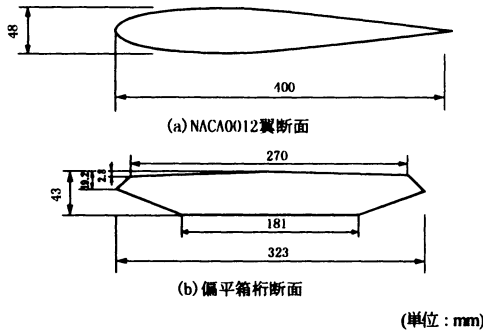


Fig. 5 風洞実験模型の断面図  
(Model sections for wind tunnel test)

## 8. 実験結果及び考察

### 8. 1 乱流シミュレーション

主流方向及び鉛直方向成分ともに Kármán 型パワースペクトルを目標に乱流シミュレーションを行った。

気流の計測は、模型中心位置（翼列下流端から 1680mm 下流位置）で行った。なお、目標とした乱流特性値は以下の通りである。

平均風速  $U=4\text{m/s}$

主流方向成分乱れ強さ  $I_w=10\%$

鉛直方向成分乱れ強さ  $I_v=5\%$

主流方向成分乱れスケール  $L_w=1.5\text{m}$

（翼断面： $L_w/B=3.8$ ，偏平箱桁断面： $L_w/B=4.6$ ）

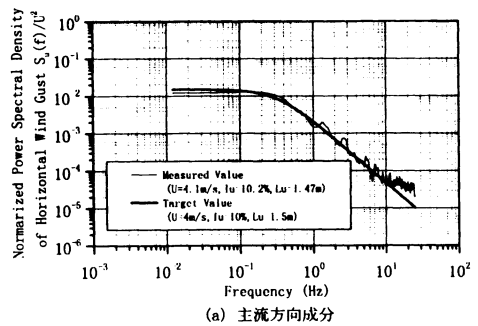
鉛直方向成分乱れスケール  $L_v=0.75\text{m}$

Fig.6 に風洞内にシミュレートされた乱流のパワースペクトルを示す。図中には計測された乱流特性値及び目標とする Kármán 型スペクトルを併記している。

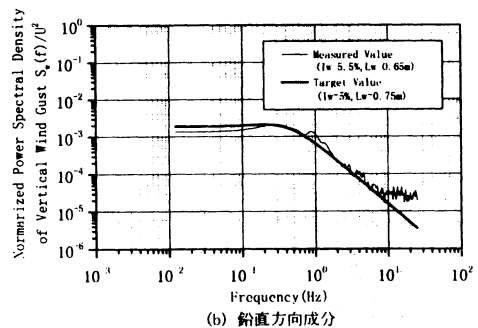
主流方向成分については、ほぼ目標とするスペクトル形状に適合する計測スペクトルが得られており、乱流特性値も 2% 程度の誤差範囲に入っている。鉛

直方向成分については、計測値は低周波領域で目標値よりも小さく、 $10\text{Hz}$  以上の周波数領域では、目標値よりも大きくなっている。乱流特性値をみると、乱れ強さは目標値よりも 10% 大きな値となっており、乱れスケールは目標値よりも 15% 低い値となった。

低周波数領域で計測スペクトルが目標値よりも低くなる要因であるが、翼列により生成される平均気流傾斜角は下流に行くに従い低下する傾向にあり、今回計測したポイントでは翼列を最大限傾斜させても（注：装置の破損を考え、 $10^\circ$  以上は駆動しないようにコンピュータ制御している）、目標とする平均気流傾斜角が得られなかったものと推察される。また、このことが乱れスケールの低下につながったものと考えられる。



(a) 主流方向成分



(b) 鉛直方向成分

Fig.6 アクティブガストジェネレータにより生成された乱流のパワースペクトル  
(Normalized power spectral density of the turbulent flows generated by the active gust generator)

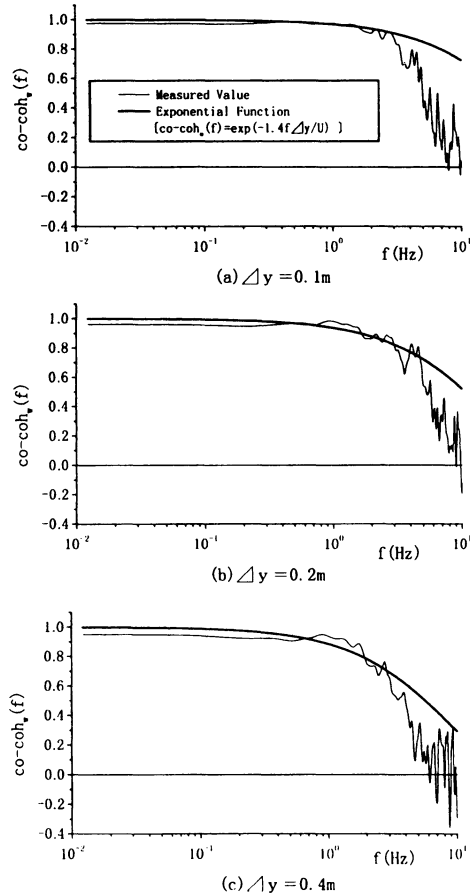
### 8. 2 アクティブ制御乱流の空間相関

8. 1 で生成した乱流について、気流直角水平方向における 2 点間距離  $\Delta y$  を 0.1m, 0.2m 及び 0.4m と変化させて、空間相関を計測した。

Fig.7 は鉛直方向気流変動のコ・コヒーレンスを

示したものである。実験では、主流方向変動気流の空間相関も計測しているが、本研究における空力アドミッタンスの算定に直接用いないことから割愛する。

図中には次式で示される指数関数近似式も併記している。近似式のディケイファクターを 1.4 としているが、これは各計測値に対する最小二乗近似値として得られた値の平均値である。なお、近似式の算定に際しては、空力アドミッタンスを算定する 3Hz までの計測値を用いた。



(注) 指数関数のあてはめは 3Hz 以下の計測値についておこなった

Fig.7 気流直角水平方向における鉛直方向気流変動のコ・コヒーレンス  
(Co-coherence between the two points along the span-wise direction for the w-fluctuation)

$$co-coh_w(f) = \exp\left(-\frac{1.4f\Delta y}{U}\right) \quad (75)$$

ここに、 $\Delta y$  : 気流直角水平方向における 2 点間距離。

また、式(75)に対するジョイントアクセプタンス関数  $|J_w(f)|^2$  は次式で与えられる<sup>32)</sup>。

$$|J_w(f)|^2 = \frac{2}{(1.4\xi)^2} [1.4\xi - 1 + \exp(-1.4\xi)] \quad (76)$$

$$\xi = f\ell/U$$

ただし、 $co-coh_w(f)=1$  (準定常値) の時は  $|J_w(f)|^2=1$  となる。

### 8.3 非定常空気力係数の算定と等価 Theodorsen 関数及び等価 Wagner 関数の同定

翼断面及び偏平箱桁断面の非定常空気を計測し、 $H_i^*$  および  $A_i^*$  を算定した。Fig.8 及び Fig.9 に算定された  $H_i^*$  および  $A_i^*$  を示す。図中には R.T.Jones 近似式による理論関数を併記している。

翼断面については、乱流中での計測値を示している。乱流中では、空力アドミッタンスを計測する風速 4m/s に固定し、加振周波数を変化させて非定常空気を計測した。

一方、一樣流中でも同様に加振周波数を変化させて非定常空気を計測したが、風速 4m/s ではレイノルズ数の影響が認められ、理論関数と著しく異なるなどの不都合が生じた。このため、本論文では、乱流中の非定常空気をのみを掲載することとした。なお、乱流中では、静的空気力係数に及ぼすレイノルズ数影響などを調べたが、特に、顕著な影響は認められなかった。

算定された  $H_i^*$  および  $A_i^*$  をみると、翼断面については理論関数によく一致した値となっていることがわかる。偏平箱桁断面については、やや理論関数と異なる傾向にあることが分かる。

次に、得られた非定常空気力係数をもとに、上述の未知パラメータ  $c_1 \sim c_5$  及び  $d_1 \sim d_5$  を同定した。同定結果を Table.1 及び Table.2 に示す。Table.1 は揚力に関する等価 Theodorsen 関数の各パラメータを、Table.2 には空力モーメントに関する等価 Theodorsen 関数の各パラメータを示している。同定手法は、先に述べた EK-WGI 法と DLS 法を適用し、両方法の計算結果を併記している。また、表中には計測された揚力及び空力モーメント係数勾配も同定値との比較のために掲載している。

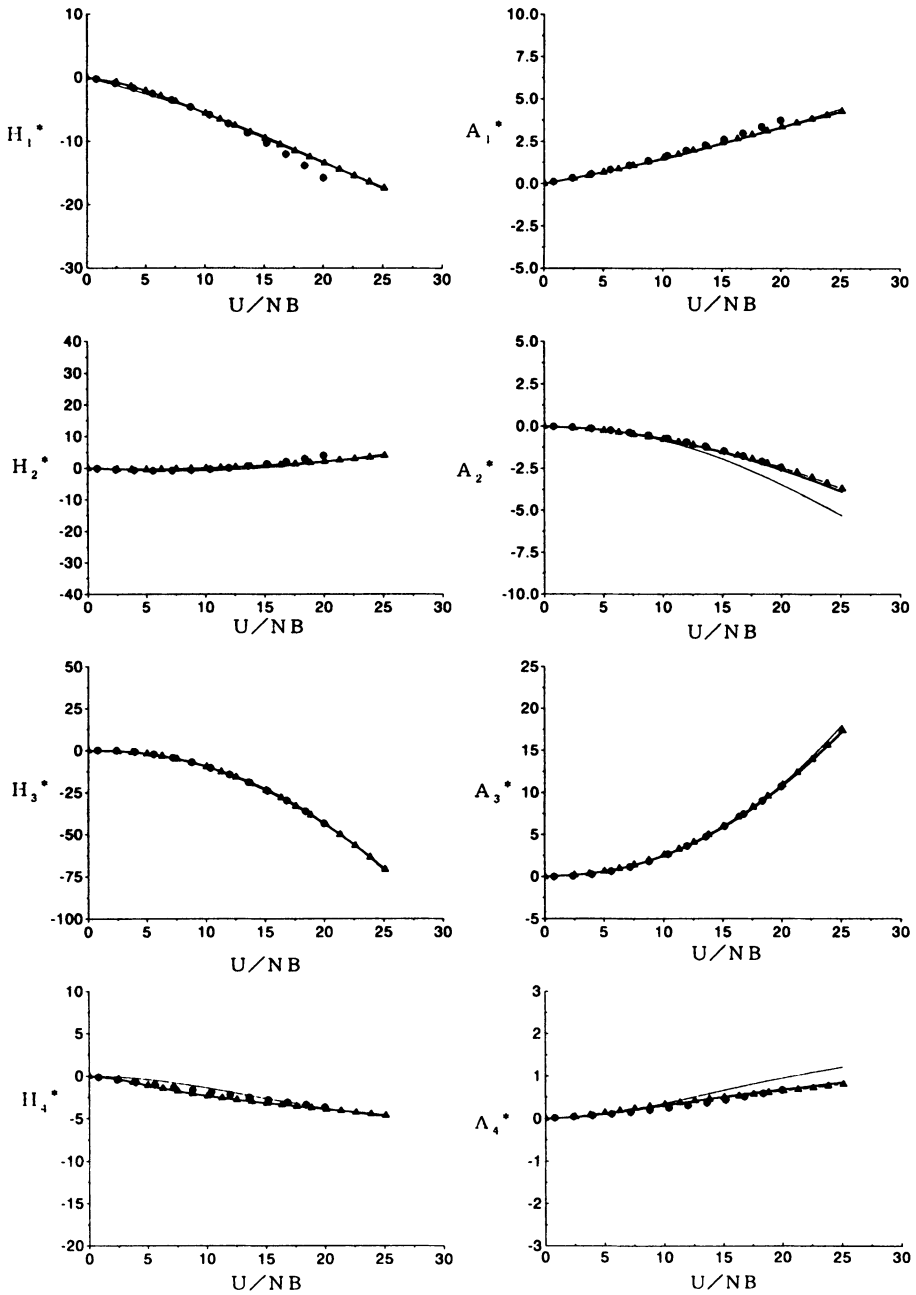
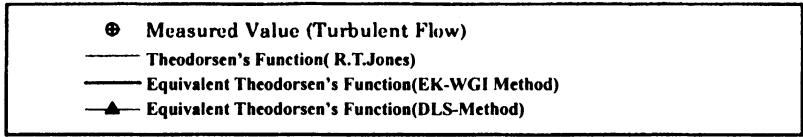


Fig.8 非定常空気力係数の計測値と等価 Theodorsen 関数を用いた推定値 (NACA0012 翼断面)  
(Measured values and identified ones using equivalent Theodorsen's function, NACA0012 airfoil section)

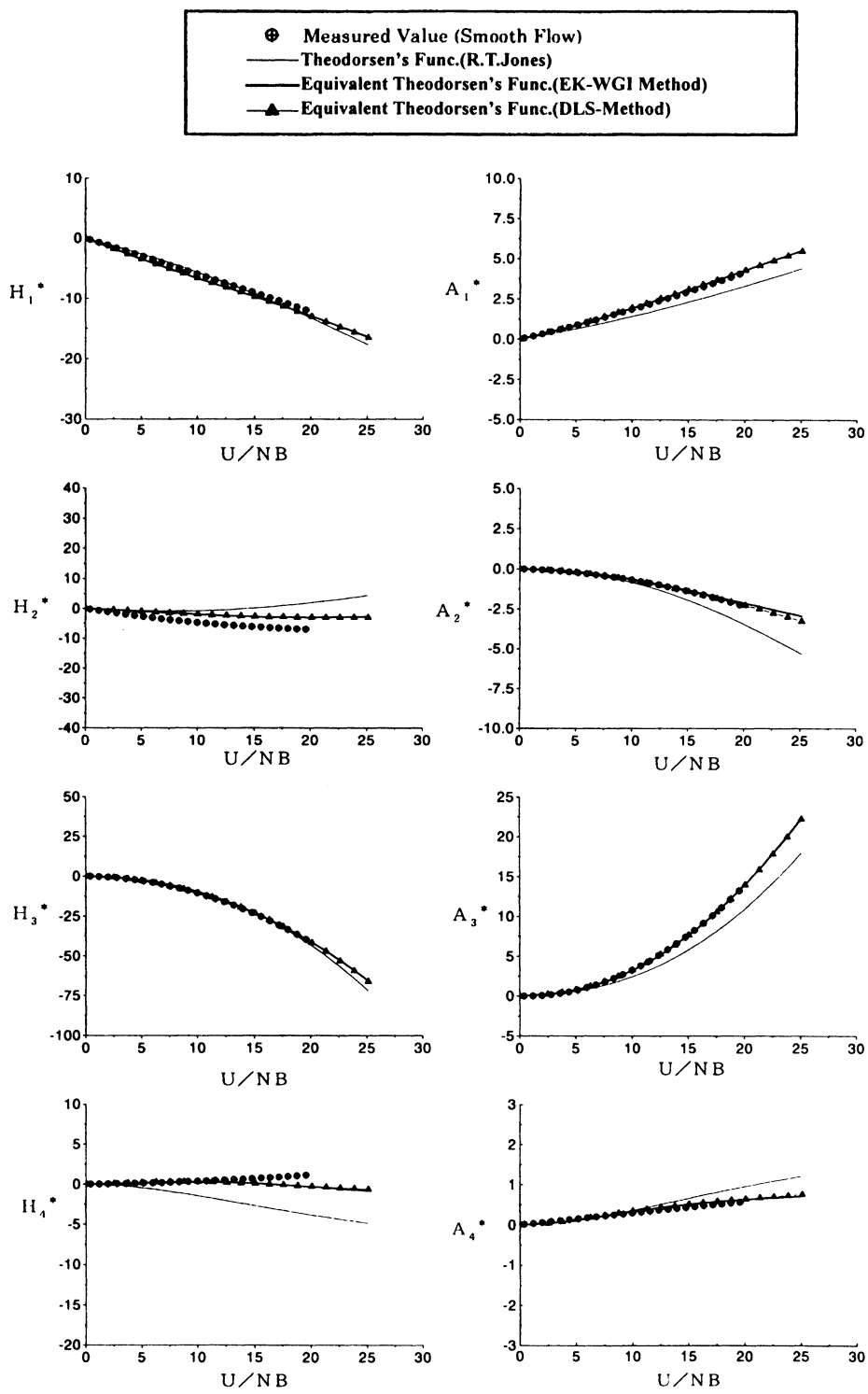


Fig.9 非定常空気係数の計測値と等価 Theodorsen 関数を用いた推定値(扁平箱桁断面)  
(Measured values and identified ones using equivalent Theodorsen's function, Flat box-girder section)

Table.1 同定された揚力に関する等価 Theodorsen 関数のパラメータ  
(Identified parameters of equivalent Theodorsen's function for lift force)

	翼断面 R.T.Jones 式	NACA0012 翼断面		偏平箱桁断面	
		EK-WGI 法	DLS 法	EK-WGI 法	DLS 法
c1	0.165	0.291	0.286	-0.555	-0.278
c2	0.0455	0.066	0.067	0.385	0.634
c3	0.335	0.443	0.437	0.596	0.260
c4	0.3	0.903	0.877	0.259	0.269
c5	6.283	6.251	6.221	4.664	4.495
c5 (計測値)	—	6.028		4.678	

(\*)EK-WGI 法 : 拡張カルマンフィルター法  
DLS 法 : 非線形最小二乗法  
(Damped Least Square 法)

Table.2 同定された空力モーメントに関する等価 Theodorsen 関数のパラメータ  
(Identified parameters of equivalent Theodorsen's function for moment)

	翼断面 R.T.Jones 式	NACA0012 翼断面		偏平箱桁断面	
		EK-WGI 法	DLS 法	EK-WGI 法	DLS 法
d1	0.165	0.276	0.290	-0.006	0.108
d2	0.0455	0.051	0.062	0.030	0.089
d3	0.335	0.214	0.224	0.296	0.242
d4	0.3	0.500	0.758	0.475	0.595
d5	1.571	1.534	1.516	1.471	1.584
d5 (計測値)	—	1.473		1.473	

同定された各パラメータを用いて、 $H_i^*$ および  $A_i^*$  を算定した。計算結果を Fig.8 及び Fig.9 に併記する。これより、 $H_i^*$ の一部を除き、同定値はほぼ実験値に適合していることが分かる。なお、同定手法による大きな差は認められなかった。

次に、得られた各パラメータを用いて、等価 Theodorsen 関数及び等価 Wagner 関数を算定した。結果を Fig.10 及び Fig.11 に示す。いずれも先に述べた2つの同定法による結果を併記しているが、偏平箱桁断面については、若干ではあるが同定手法による違いが認められる。

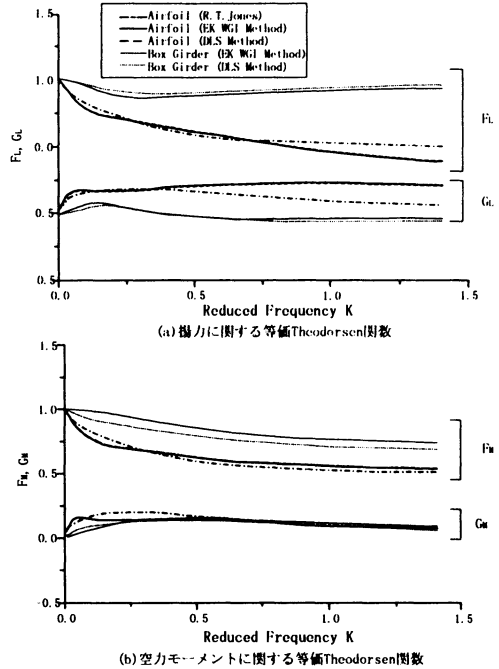


Fig.10 等価 Theodorsen 関数  
(Equivalent Theodorsen's function)

図より、翼断面については、算定された等価 Theodorsen 関数及び等価 Wagner 関数ともに理論関数にほぼ一致していることが分かる。

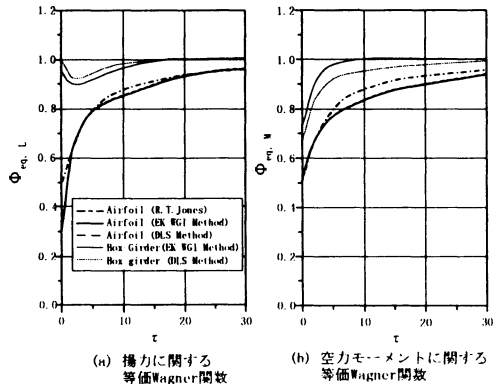


Fig.11 等価 Wagner 関数  
(Equivalent Wagner's function)

偏平箱桁断面については、いずれも理論関数と異なる傾向にあることが分かる。揚力に関する等価 Wagner 関数をみると、 $\tau=0$  で1近くまで立ち上がり、そこから徐々に低下する傾向を示すが、 $\tau=3$  付近から再び、上昇して定常値に漸近していく様子



が伺える。これは吉村・中村<sup>33)</sup>が、平板やプレートガーダに対して実験的に求めた等価 Wagner 関数にみられる傾向と合致している (Fig.12)。

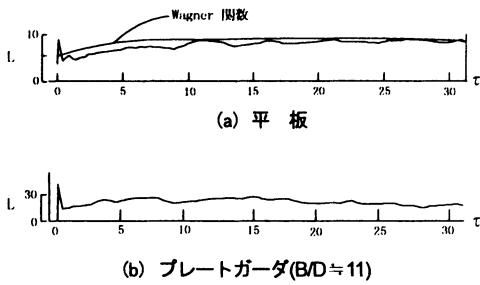


Fig.12 平板とプレートガーダのWagner関数の計測<sup>33)</sup>  
(Measurement of Wagner's function for flat plate and plate girder section)

#### 8. 4 等価 Theodorsen 関数を用いた空力アドミッタンスの推定

翼断面について、空力アドミッタンスの計測値と等価 Theodorsen 関数を用いた推定値の比較を行った。空力アドミッタンスを算定するに当たり、乱流中で計測された静的空気力係数を用いた (Table. 3)。

Table.3 乱流中の静的空気力係数  
(Static aerodynamic force coefficients in the turbulent flow)

	NACA0012 翼断面	偏平箱桁断面
$C_D$	0.094	0.378
$C_L$	-0.011	-0.222
$dC_L/d\alpha$	6.028	3.472
$C_M$	-0.002	0.014
$dC_M/d\alpha$	1.473	1.175
$(L_1/L_2)^2$	3.23E-06	3.32E-03
$(M_1/M_2)^2$	1.49E-06	1.44E-04

(※)  $L_1, L_2, M_1, M_2$  は式 (71) に定義されている。

Fig.13 は、式(74)に従い、式(76)で与えられるジョイントアクセプタンス関数を考慮した計算結果を示している。また、Fig.14 は、ジョイントアクセプタンス関数を考慮しない場合 (準定常値) の計算結果を示したものである。いずれも理論関数である Sears 関数を併記しているが、ジョイントアクセプタンス関数を考慮しない場合の方が理論値に近い値

となっていることが分かる。

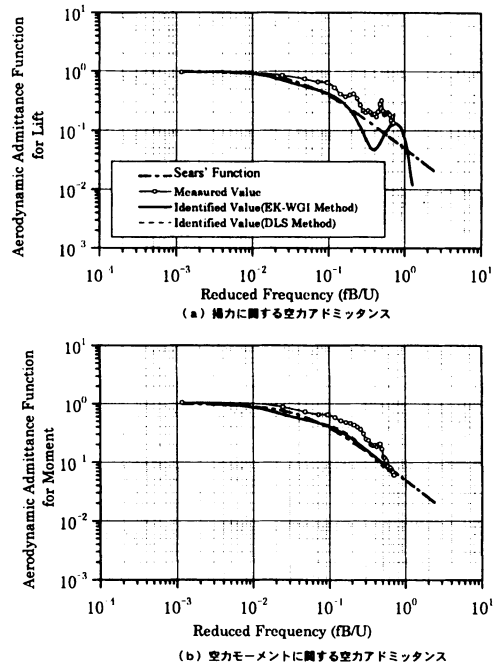
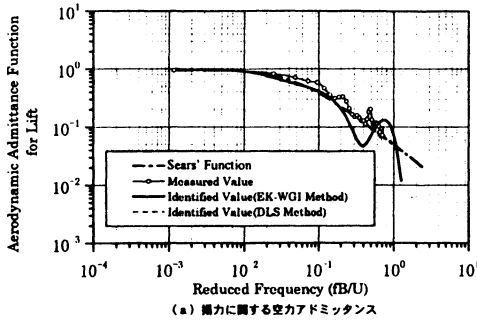


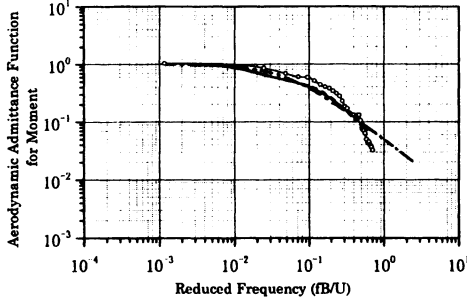
Fig.13 空力アドミッタンスの計測値と推定値  
(NACA0012 翼断面,ジョイントアクセプタンスを考慮)  
(Measured and predicted values of aerodynamic admittance functions with joint acceptance function, NACA0012 airfoil section)

式(76)で与えられるジョイントアクセプタンス関数は、気流直角方向の2点間における空気力の相関が変動気流の相関と等しいと仮定して与えられるものである。しかし、J. B. Jacobsen<sup>33)</sup>, や G. L. Larose<sup>14)</sup>, そして、K. Kimura<sup>15)</sup>の研究によると、変動気流の相関よりも空気力 (揚力と空力モーメント)の相関の方が高くなるとの報告がなされている。このように式(76)で与えられるジョイントアクセプタンス関数は相関の低下を過大評価している可能性があり、上述の計測値と理論値との対応はその裏付けとも考えられる。そこで、偏平箱桁断面については、ジョイントアクセプタンス関数を考慮せず (準定常値)、空力アドミッタンスを算定した。

Fig.15 に偏平箱桁断面の空力アドミッタンスを示す。計測された空力アドミッタンスをみると、揚力及び空力モーメントともに Sears 関数よりも大きくなる傾向にあり、この傾向は揚力アドミッタンスにおいて顕著である。

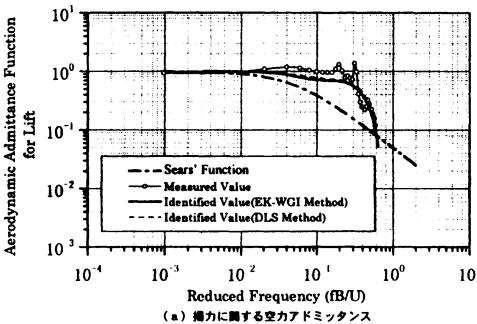


(a) 揚力に関する空力アドミッタンス

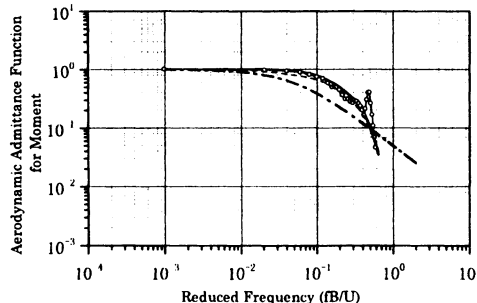


(b) 空力モーメントに関する空力アドミッタンス

Fig.14 空力アドミッタンスの計測値と推定値 (NACA0012 翼断面, ジョイントアセプタンスを考慮せず) (Measured and predicted values of aerodynamic admittance functions without joint acceptance function, NACA0012 airfoil section)



(a) 揚力に関する空力アドミッタンス



(b) 空力モーメントに関する空力アドミッタンス

Fig.15 空力アドミッタンスの計測値と推定値(偏平箱桁断面, ジョイントアセプタンスを考慮せず) (Measured and predicted values of aerodynamic admittance functions without joint acceptance function, Flat box-girder section)

次に、空力アドミッタンスの計測値と等価 *Theodorsen* 関数を用いた推定値 (等価 *Sears* 関数) を比較する。各断面の推定値をいずれも Fig.14 と Fig.15 に併記している。

図より、翼断面・偏平箱桁断面ともに計測値と等価 *Sears* 関数の対応は良好である。なお、翼断面の揚力アドミッタンスの推定値をみると、無次元周波数 0.2 を越えたあたりから *Sears* 関数の上下に変動しているが、これはベッセル関数が周期関数であることによる影響と考えられる。

翼断面については、等価 *Theodorsen* 関数・等価 *Wagner* 関数ともに理論関数に近い値であり、*Sears* 関数の誘導過程に做えば、最終的に得られる推定値が *Sears* 関数にほぼ等しくなるのは当然であるが、偏平箱桁断面についても計測値と推定値が良好に対応するのは興味深い結果と言える。

偏平箱桁断面の等価 *Wagner* 関数をみれば、翼の理論関数 (*Wagner* 関数) とは異なる関数形となっており、その過渡応答特性の違いが空力アドミッタンスの違いに反映されているものと考えられる。このように空力アドミッタンスは、各橋梁断面固有なものと同様に推察され、今後、同様の検討を他の橋梁断面についても検討していきたい。

## 9. 結論

本研究では、非常空気をを用いて、揚力及び空力モーメントに関する空力アドミッタンスを間接的に推定する方法を提案し、その妥当性を実験的に検証した。本論文で得られた成果は、以下にまとめられる。

- 1) 薄翼が調和振動する場合と正弦的な鉛直ガストが作用する場合は、薄翼に作用する相対鉛直速度の違いがあるものの、その相対鉛直速度により誘起される循環揚力はいずれも *Theodorsen* 関数により決定されることを述べた。そして、本論文では、薄翼に対する理論展開を橋梁断面に拡張するため、*Theodorsen* 関数に対応する等価 *Theodorsen* 関数を定義し、それを *Sears* 関数の理論的な誘導過程に適用することを提案した。
- 2) 剥離の影響が少ない翼断面と偏平箱桁断面を用い、アクティブ制御された乱流中での揚力と空力モーメントに関する空力アドミッタンス

スを計測した。翼断面については、理論関数である Sears 関数にほぼ一致するが、偏平箱桁断面については、揚力・空力モーメントともに Sears 関数よりも大きめの値となった。

- 3) 翼断面及び偏平箱桁断面の非定常空気を計測し、等価 *Theodorsen* 関数及び等価 *Wagner* 関数を算定した。翼断面については、ともに理論関数に近い値であり、偏平箱桁断面については、理論関数と異なる傾向を示した。また、偏平箱桁断面の等価 *Wagner* 関数は平板や偏平なプレートガーダー断面に対する実測値と同様の傾向を示した。
- 4) 翼断面及び偏平箱桁断面ともに等価 *Theodorsen* 関数を用いて推定された空力アドミッタンスと実験値は良好に対応した。
- 5) 空力アドミッタンス（揚力・空力モーメント）は、非定常空気力と密接に関係があり、各断面固有の性質を有するものと推察される。

ところで、*Sears* 関数の誘導にあたりクッタの条件を満たす揚力分布が仮定されている。従って、今回実験に用いた翼断面及び偏平箱桁断面ともに剥離の影響が少なく、仮定される揚力分布を満たすことが予想される。しかし、多くの橋梁断面は剥離を伴う鈍い断面であり、仮定される揚力分布を満たすかどうか疑問である。本推定法を各橋梁断面に適用する際の誤差要因と考えられ、今後の検討課題の一つと考えている。

また、本稿では等価 *Theodorsen* 関数の推定に際して、偏平箱桁断面については一様流中の非定常空気をを用いたが、空力アドミッタンスの推定にあたっては、乱流中の非定常空気をを用いるのがより望ましいと考えている。乱流中の非定常空気の適用についても、今後、十分検討する予定である。

## 謝 辞

本研究を実施するにあたり、日立造船㈱技術研究所の植田利夫博士及び砂田博幸氏・山口映二氏に御協力を得た。ここに記して、深甚なる謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 竹口昌弘，宮田利雄，鳥海隆一，佐藤弘史，

田中 洋：来島第二大橋ガスト応答に関する検討，土木学会第 53 回年次学術講演会，1998.10.，I -B42

- 2) 佐藤弘史，北川 信，勝地 弘，田中 洋，畑中章秀：周辺地形による風特性を考慮した斜張橋全橋模型のガスト応答解析，構造工学論文集，Vol.42A，1996.3.，pp.855-866
- 3) 加藤真志，武田勝昭：長大橋梁のガスト応答評価に関する考察，第 11 回風工学シンポジウム論文集，1990.12.，pp.37-42
- 4) 金崎智樹，宮田利雄，北川 信，鳥海隆一，井上浩男：明石海峡大橋全橋模型ガスト応答特性の一検討，第 13 回風工学シンポジウム論文集，1994.12.，pp.233-238
- 5) 松田一俊，鳥海隆一，岩崎 徹，徳重雅史：架設時長大斜張橋の水平ガスト応答，第 15 回風工学シンポジウム論文集，1998.12.，pp.377-382
- 6) W.R. Sears : Aspects of Non-Stationary Airfoil Theory and Its Practical Application, J. of Aeron. Sci. Vol. 8, 1941.
- 7) 本州四国連絡橋公団：明石海峡大橋耐風設計要領・同解説，1990.
- 8) 小西一郎，白石成人，松本勝，小前 繁：変動風による橋梁断面の動的応答特性について，構造物の耐風性に関する第 2 回シンポジウム，1972.12.，pp.167-174
- 9) D. E. Walshe and T. A. Wyatt : Measurement and Application of the Aerodynamic Admittance Function for a Box-Girder Bridge, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 14, 1983.，pp.211-222
- 10) 佐藤弘史，松野栄明，北川 信：明石海峡大橋の補剛桁に関する空力アドミッタンスの評価，第 13 回風工学シンポジウム論文集，1994.12.，pp.131-136
- 11) J. D. Holmes : Prediction of the Response of a Cable Stayed Bridge to Turbulence, Proc. 4th Int. Conf. On Wind effects on Buildings and Structures, 1975.，pp.187-197
- 12) E. D. Jancauskas and W. H. Melbourne : The Aerodynamic Admittance of Two-Dimensional Rectangular Section Cylinders in Smooth Flow, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics,

- 23, 1986., pp. 395-408
- 13) J. B. Jakobsen : Fluctuating Wind Load and Response of a Line-Like Engineering Structure with Emphasis on Motion-Induced Wind Forces, Thesis of Ph.D, Dept. of Structural Eng., Univ. of Trondheim , 1995.
  - 14) G. L. Larose, H. Tanaka, N. J. Gimsing and C. Dyrbye : Direct Measurements of Buffeting Wind Forces on Bridge Decks, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 74-76, 1998., pp. 809-818
  - 15) K. Kimura, Y. Fujino, S. Nakato and H. Tamura: Characteristics of Buffeting Forces on Flat Cylinders, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 69-71, pp.365-374, 1997.
  - 16) 木村吉郎, 藤野陽三 : 乱れた風の空間相関の定式化について, 土木学会第 50 回年次学術講演会, 1995. , pp.1478-1479
  - 17) 奥村 学, 小林紘士, 畑中章秀 : 矩形柱及び六角柱の揚力方向の空力アドミッタンス, 構造工学論文集, Vol.44A, 1998.3. , pp.979-986
  - 18) 白石成人, 松本 勝, 白土博通 : 風の乱れに起因した構造物の非定常空気力特性に関する基礎的研究, 土木学会報告論文集, 第 328 号, 1982. 12. , pp.19-30
  - 19) 植田利夫, 田中 洋, 砂田博幸, 山口映二 : 大型低速風洞設備の概要と性能, 日本風工学会誌, No.73, 1997., pp.45-54
  - 20) H. Kobayashi, A. Hatanaka and T. Ueda : Active Simulation of Time Histories of Strong Wind Gust in a Wind Tunnel, J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 53, 1994. , pp.315-330
  - 21) Y.C. Fung : An Introduction to the Theory of Aeroelasticity , Dover Publications Inc., 1969.
  - 22) E. H. Dowell, H. C. Curtiss Jr., R. H. Scanlan and F. Sisto : A Modern Course in Aeroelasticity, Kluwer Academic Publishers, 1989.
  - 23) R. L. Bisplinghoff, H. Ashley and R. L. Halfman : Aeroelasticity, Addison-Wesley, 1955.
  - 24) R. H. Scanlan and J. J. Tomko : Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives, J. Eng. Mech. Div. ASCE, 97, No. EM6, 1971., pp.1717-1737
  - 25) E. Simiu and R.H. Scanlan : Wind Effects on Structures - 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1996.
  - 26) 鷺津久一郎 : 空力弾性学, 共立出版株式会社, 昭和 35 年
  - 27) R. H. Scanlan, J. G. Béliveau and K. S. Budlong : Indicial Aerodynamic Functions for Bridge Decks, J. Eng. Mech. Div. ASCE, 100, No. EM4, 1974., pp.657-674
  - 28) 松本 勝, 白石成人, 白土博通, 重高浩一, 新原雄二, 山口滋弘 : 構造基本断面の非定常空気力に関する研究, 第 12 回風工学シンポジウム論文集, 1992. 12., pp.231-236
  - 29) 松本 勝, 浜崎 博, 吉住文太 : 超長大吊橋補剛桁のフラッター安定化に関する研究, 土木学会論文集, No.537/I-35, 1996.4, pp.191-203
  - 30) M. Hoshiya and E. Saito : Structural Identification by Extended Kalman Filter, J. Eng. Mech. Div. ASCE, 110, No. EM12, 1984.
  - 31) 南 茂夫 : 科学計測ための波形データ処理, C Q 出版社, 1986.
  - 32) 岡内 功, 伊藤 學, 宮田利雄 : 耐風構造, 丸善株式会社, 1977.
  - 33) 吉村 健, 中村泰治 : 吊橋断面の突風応答 (第 1 報), 土木学会第 30 回年次学術講演会, 1975. , pp.443-444